sjst.scst.edu.ly
Surman Journal for Science and Technology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)
مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol 7, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 100 ~ 113

تحليل تقارب الخوارزميات العددية لحل النظم الخطية

لطفية المختار أبو القاسم
قسم الحاسوب المعهد العالي للعلوم والتقنية الزهراء

1.الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل أداء الخوارزميات العددية الشائعة لحل النظم الخطية، مع التركيز على تقارب هذه الخوارزميات والعوامل المؤثرة عليه. تم استعراض ومقارنة الخوارزميات المباشرة (الحذف الغاوسي وطريقة التفكيك الثلاثي) والخوارزميات التكرارية (طريقة جاكوبي جاوس-سايدل ، والتدرج المترافق).

شملت المنهجية تصميم واختبار نظم خطية بمصفوفات ذات أحجام وخصائص مختلفة، حيث تم قياس عدد التكرارات، زمن التنفيذ، ومعيار الخطأ لتقييم أداء الخوارزميات. أظهرت النتائج أن الطرق المباشرة تناسب النظم الصغيرة والمتوسطة الحجم، حيث توفر دقة عالية مع زمن تنفيذ معقول. بالمقابل، أثبتت الطرق التكرارية فعاليتها في النظم الكبيرة وقليلة الكثافة، مع تفوق طريقة التدرج المترافق في سرعة التقارب وكفاءة الأداء.

تناولت الدراسة أيضًا العوامل المؤثرة على التقارب، مثل شرط التكييف وتوزيع القيم الذاتية واختيار الحل الأولي. أكدت النتائج أن استخدام تقنيات مثل إعادة التشكيل (Preconditioning) يُحسن من تقارب الخوارزميات التكرارية بشكل ملحوظ.

تُعد هذه الدراسة مرجعًا مفيدًا لاختيار الخوارزمية المناسبة بناءً على خصائص النظام وحجمه، وتقدم توصيات عملية لتحسين الأداء العددي. كما تدعو إلى مزيد من البحث في تطوير خوارزميات جديدة واستخدام تقنيات حديثة مثل الذكاء الاصطناعي لتحسين كفاءة الحلول العددية.

الكلمات المفتاحية :النظم الخطية، الخوارزميات العددية، التقارب، الحذف الغاوسي، التدرج المترافق، إعادة التشكيل.

1.Abstract

The purpose of this work is to review numerical algorithms for the solution of linear systems and determine their convergence characteristics. Gaussian Elimination and LU Decomposition were found to be Direct methods while Jacobi Method, Gauss-Seidel Method and Conjugate Gradient Method were found to be Iterative methods.

The study called for constructing and solving linear systems by using matrices of different dimensions and characteristics. Performance measures such as, number of iterations, execution time and the error norm were computed in order to assess the efficiency of the algorithms. The results proved that direct methods are ideal for small to medium size systems since the percentage accuracy is much higher than the iterative methods taking reasonable amount of time for execution. However, when compared to the direct methods, the iterative methods were more efficient for large and sparse systems of equations and the conjugate gradient method was the most efficient and fastest.

This work also looked at certain effects like the condition numbers and distribution of eigenvalues and also the choice of the initial guess. This confirmed that preconditioning for instance boosts the convergence of iterative methods in a given structure.

This work can be used as a guide for choosing algorithms suited to system size and characteristics and as a practical guide on how to enhance the numerical performance. Moreover, it calls for the additional study and extension of numerical algorithms and liability of employing contemporary technologies including artificial intelligence.

Keywords: *Linear systems and solves, numerical algorithms, convergence, Gaussian Elimination, conjugate gradient, preconditioning*.

2.المقدمة

تُعد النظم الخطية واحدة من الركائز الأساسية في الرياضيات التطبيقية والهندسة، حيث تُستخدم لحل مشكلات ذات طبيعة متنوعة في مجالات متعددة مثل تحليل البيانات، الهندسة الإنشائية، والمحاكاة الفيزيائية. يتمثل النظام الخطي في مجموعة من المعادلات الخطية التي يمكن تمثيلها رياضيًا على النحو التالي: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حيث Aهي مصفوفة معاملات النظام، xهو المتجه المجهول الذي يحتوي على القيم التي نسعى لإيجادها، وbهو متجه النتائج.(Strang, 2006)

مع تزايد تعقيد النظم في التطبيقات الحديثة وازدياد أحجام البيانات، أصبحت الحاجة ملحة لتطوير خوارزميات عددية كفؤة وقادرة على التعامل مع النظم ذات الأحجام الكبيرة. يمكن تصنيف الخوارزميات العددية المستخدمة لحل النظم الخطية إلى فئتين رئيسيتين: الخوارزميات المباشرة مثل الحذف الغاوسي (Gaussian Elimination Elimination) وطريقة التفكيك الثلاثي وطريقة الخوارزميات التكرارية مثل طريقة جاكوبي (Jacobi Method) وطريقة التدرج المترافق (Golub & Van Loan, 2013).

تمثل سرعة التقارب في الخوارزميات التكرارية عاملًا حاسمًا لتقييم كفاءتها، حيث تعتمد بشكل كبير على خصائص المصفوفة مثل شرط التكييف وتوزيع القيم الذاتية. المصفوفات ذات شرط تكييف سيئ ($\mathrm{Cond}(A) \gg 1$) قد تؤدي إلى تقارب بطيء أو عدم استقرار في الحل .(Demmel, 1997) بالإضافة إلى ذلك، يمكن تحسين كفاءة الخوارزميات التكرارية باستخدام تقنيات مثل إعادة التشكيل (Preconditioning) التي تُعد أداة فعالة لتحسين سرعة التقارب.(Saad, 2003)

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل أداء الخوارزميات العددية الشائعة لحل النظم الخطية من حيث تقاربها وكفاءتها الزمنية والدقة العددية. كما تسعى إلى تسليط الضوء على تأثير خصائص النظم على أداء الخوارزميات وتقديم توصيات عملية لتحسين كفاءتها.

2.1 أهمية الدراسة

تكتسب هذه الدراسة أهميتها من الدور المركزي للنظم الخطية والخوارزميات العددية في معالجة مشكلات متنوعة في العلوم والهندسة، مثل تحليل البيانات، النمذجة الفيزيائية، وتصميم الأنظمة. تُركز الدراسة على تحليل أداء الخوارزميات التكرارية والمباشرة، مع تسليط الضوء على تقاربها وتأثير خصائص النظم، مثل شرط التكييف وتوزيع القيم الذاتية، على كفاءتها.

على الصعيد العملي، تساهم الدراسة في تحسين سرعة التنفيذ ودقة الحلول للنظم الكبيرة وقليلة الكثافة، مما يُسهم في تقليل التكاليف الزمنية والحسابية في التطبيقات الواقعية. كما تُبرز أهمية استخدام تقنيات مثل إعادة التشكيل (Preconditioning) لتسريع تقارب الخوارزميات التكرارية.

2.2 مشكلة الدراسة

في ظل الاعتماد المتزايد على النظم الخطية لحل المشكلات العلمية والهندسية، تتطلب الكفاءة العددية للخوارزميات المستخدمة تحقيق توازن بين سرعة التنفيذ ودقة النتائج، خاصة عند التعامل مع نظم كبيرة الحجم ومعقدة البنية. تكمن المشكلة الأساسية في أن بعض النظم الخطية، مثل تلك ذات شرط التكييف السيئ أو المصفوفات قليلة الكثافة، تمثل تحديًا للخوارزميات التقليدية سواء كانت مباشرة أو تكرارية. تؤدي هذه الخصائص إلى بطء التقارب، استهلاك زائد للموارد الحاسوبية، وأحيانًا فشل في الحصول على الحلول.

علاوة على ذلك، فإن الاختلاف في طبيعة النظم يؤثر على أداء الخوارزميات بشكل كبير، مما يجعل من الضروري فهم التقارب والعوامل المؤثرة عليه، مثل توزيع القيم الذاتية وفعالية تقنيات إعادة التشكيل. بناءً على ذلك، تنبع الحاجة إلى دراسة تحليلية شاملة تُقيّم أداء الخوارزميات العددية المختلفة وتحدد الأسلوب الأمثل للتعامل مع النظم ذات الخصائص المتنوعة.

2.3 أهداف الدراسة

1. **تحليل تقارب الخوارزميات العددية :**دراسة التقارب للطرق المباشرة والتكرارية لتحديد كفاءتها وسرعتها في الوصول إلى الحلول.

مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol 7, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 100 ~ 113
Surman Journal for Science and Technology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)
sjst.scst.edu.ly

2. **تحديد العوامل المؤثرة على الأداء :**استكشاف تأثير خصائص النظم الخطية (شرط التكييف وتوزيع القيم الذاتية) على سرعة ودقة الحلول التي تقدمها الخوارزميات.
3. **مقارنة الخوارزميات المختلفة :**إجراء مقارنة شاملة بين الطرق المباشرة (الحذف الغاوسي) والطرق التكرارية (جاكوبي والتدرج المترافق) لتحديد الأنسب بناءً على طبيعة النظام.

3.النظم الخطية والخوارزميات العددية

3.1تعريف النظم الخطية

النظام الخطي هو مجموعة من المعادلات الخطية التي يمكن تمثيلها بالشكل العام التالي:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

حيث:

- A هي مصفوفة ذات أبعاد $m \times n$ تمثل معاملات النظام.
- x هو متجه غير معلوم يحتوي على nعنصر يمثل القيم المجهولة.
- b هو متجه ذو أبعاد $m \times 1$ يمثل القيم على الجانب الأيمن من المعادلات.

النظام الخطي يُعتبر خطيًا لأن كل معادلة فيه خطية، أي أن المتغيرات المجهولة تظهر فقط كمضاعفات خطية (بدون أسس أو ضرب بين المتغيرات) ويتم جمعها أو طرحها. على سبيل المثال، النظام التالي يُعتبر نظامًا خطيًا

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

يمكن تمثيل هذا النظام في صورة المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

تُستخدم النظم الخطية في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية مثل حل المعادلات التفاضلية، تحليل البيانات، ونمذجة الأنظمة الفيزيائية.(Strang, 2006; Golub & Van Loan, 2013)

3.2 تصنيف النظم الخطية

تُصنف النظم الخطية بناءً على عدة معايير رياضية وهندسية، أهمها:

أولا التصنيف حسب أبعاد المصفوفة :A

1. **النظام المربع:(Square System)** إذا كان عدد المعادلات mيساوي عدد المتغيرات n و $(m = n)$، يُسمى النظام مربعًا. في هذه الحالة، يمكن أن تكون المصفوفة Aقابلة للعكس (Invertible) إذا كان محددها غير صفري.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = (2 \cdot 4) - (1 \cdot 3) = 5 \neq 0.$$

2. **النظام غير المربع:(Rectangular System)**

اذا كان $(m \neq n)$ يعتبر النظام غير مربع. قد يكون قابلًا للحل إذا توفرت شروط خاصة مثل توافر حلول أقل عددًا أو استخدام طرق التحسين(Optimization) .

ثانيا: حسب خصائص المصفوفة :AAA

1. النظام المتناظر:(Symmetric System) إذا كانت المصفوفة A تساوي مصفوفتها المنقولة $A = A^T$ هذا النوع شائع في تطبيقات الميكانيكا والهندسة.(Golub & Van Loan, 2013)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. النظام قليل الكثافة (Sparse System):
إذا كانت غالبية عناصر المصفوفة A تساوي صفرًا. يُستخدم هذا النوع بشكل واسع في تطبيقات الحوسبة عالية الأداء (Saad, 2003).
3. النظام المنخفض التصنيف (Singular System):
إذا كانت المصفوفة A مفردة ($\det(A) = 0$)، فإن الحل الفريد غير مضمون، مما يتطلب استخدام تقنيات خاصة مثل تحليل القيم الذاتية(Lay, 2015) .

ثالثا حسب عدد الحلول:

1. النظام المتسق:(Consistent System) إذا كان هناك حلاً واحدًا أو أكثر للنظام.
2. النظام غير المتسق:(Inconsistent System) إذا لم يكن هناك أي حل للنظام.

3.3 الخوارزميات العددية الشائعة

تُعد الخوارزميات العددية من الأدوات الأساسية في حل النظم الخطية، حيث توفر طرقًا منهجية للحصول على الحلول بدقة وكفاءة. يمكن تصنيف هذه الخوارزميات إلى فئتين رئيسيتين :الخوارزميات المباشرة والخوارزميات التكرارية.

اولا الخوارزميات المباشرة(Direct Methods)

الخوارزميات المباشرة تهدف إلى إيجاد الحلول الدقيقة للنظام الخطي (في حدود الدقة العددية للحاسوب) من خلال إجراء عدد محدود من العمليات. تُستخدم عادة عندما تكون المصفوفة Aذات أبعاد صغيرة أو متوسطة وحسنة التكييف. أبرز هذه الطرق تشمل:

1) **الحذف الغاوسي:(Gaussian Elimination)**
تعتمد هذه الطريقة على تحويل المصفوفة AAA إلى مصفوفة مثلثية علوية باستخدام عمليات الصفوف، ومن ثم إيجاد الحل عبر الرجوع العكسي.(Back Substitution)
- المزايا: بسيطة ومباشرة.
- العيوب: تصبح غير فعالة عند التعامل مع مصفوفات كبيرة أو قليلة الكثافة.(Strang, 2006)

2) **التفكيك الثلاثي :(LU Decomposition)** تقوم هذه الطريقة بتفكيك المصفوفة Aإلى حاصل ضرب مصفوفتين: مصفوفة مثلثية علوية Uوأخرى مثلثية سفلية L تُستخدم هذه الطريقة لتسريع الحلول عندما يُطلب حل النظام نفسه لعدة متجهات مختلفة b.

$$A = L \cdot U,$$

حيث Lمصفوفة مثلثية سفلية و Uمصفوفة مثلثية علوية.
- المزايا: مناسبة للحالات المتعددة.
- العيوب: تعاني من مشاكل الاستقرار العددي في حالة وجود مصفوفات سيئة التكييف (Golub & Van Loan, 2013).

3) **تحليل القيم الذاتية:(Eigenvalue Decomposition)**
يُستخدم لتحليل الأنظمة التي تتطلب إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية. مفيد بشكل خاص في التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

ثانيا الخوارزميات التكرارية(Iterative Methods)

الخوارزميات التكرارية تعتمد على تقريب الحل بشكل تدريجي عبر تكرار عمليات محددة حتى يتم الوصول إلى حل ضمن درجة معينة من الدقة. تُستخدم هذه الطرق عادة مع المصفوفات الكبيرة وقليلة الكثافة.

1. **طريقة جاكوبي:(Jacobi Method)**

تعتمد على الفصل بين المعادلات وتحديث كل متغير بناءً على القيم القديمة لجميع المتغيرات الأخرى. تتميز بالبساطة ولكنها تحتاج إلى عدد كبير من التكرارات لتحقيق التقارب.
تحديث الحل في التكرار $k + 1$ يتم كالتالي:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right),$$

حيث a_{ii} هو العنصر القطري للمصفوفة A

2. طريقة جاوس-سايدل:(Gauss-Seidel Method)

مشابهة لطريقة جاكوبي، لكنها تُحدث كل متغير فور حسابه، مما يجعلها أسرع في التقارب من جاكوبي في العديد من الحالات.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right).$$

ثالثا طريقة التدرج المترافق:(Conjugate Gradient)

تُستخدم لحل النظم ذات المصفوفات المتناظرة والموجبة التعريف. تُعد من أكثر الطرق التكرارية كفاءة لأنها تجمع بين سرعة التقارب وقلة استهلاك الذاكرة(Saad, 2003) .

4.مفهوم التقارب في الخوارزميات العددية

التقارب في الخوارزميات العددية يشير إلى مدى سرعة اقتراب الحلول التكرارية للحل الدقيق للنظام الخطي. بمعنى آخر، يعبر مفهوم التقارب عن قدرة الخوارزمية العددية على تحسين تقديرات الحل خلال التكرارات المتتالية والوصول إلى نتيجة دقيقة في عدد محدود من التكرارات. هذا المفهوم أساسي لتقييم كفاءة الخوارزميات التكرارية بشكل خاص، حيث يعتمد أداؤها بشكل كبير على سرعة التقارب.

تعريف رياضي للتقارب

لنفترض أن $\mathbf{x}^{(k)}$ هو التقدير الحالي للحل في التكرار K و $\mathbf{x}^*$ هو الحل الدقيق للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمكن قياس الخطأ في التكرار kباستخدام معيار مثل:

$$\| \mathbf{e}^{(k)} \| = \| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \|,$$

حيث $\mathbf{e}^{(k)}$ يمثل خطأ الحل. إذا تحقق:

$$\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{e}^{(k)} \| = 0,$$

فإن الخوارزمية تُعتبر متقاربة. أما سرعة هذا التقارب فتُحدد غالبًا من خلال النسبة بين قيم الخطأ المتتالية، والتي تُعرف باسم معدل التقارب.(Rate of Convergence)

معدل التقارب

معدل التقارب يُعبر عن السرعة التي ينخفض بها الخطأ $\| \mathbf{e}^{(k)} \|$ مع كل تكرار. يمكن تصنيفه إلى الأنواع التالية:

تقارب خطي:(Linear Convergence)

إذا كان الخطأ يقل بمعدل تناسبي ثابت، أي:

$$\| \mathbf{e}^{(k+1)} \| \leq c \| \mathbf{e}^{(k)} \|,$$

حيث $0 < c < 1$. مثال على ذلك طريقة جاكوبي.

تقارب فوق خطي (Superlinear Convergence):

عندما يقترب الحل بسرعة أكبر من الخطية، ولكن أقل من التربيعية. مثال: بعض التطبيقات المحسّنة لطريقة التدرج المترافق.

تقارب تربيعي (Quadratic Convergence):

إذا كان الخطأ ينخفض بمعدل مربع الخطأ السابق

$$\| \mathbf{e}^{(k+1)} \| \leq c \| \mathbf{e}^{(k)} \|^2.$$

هذا النوع نادر في الخوارزميات التكرارية، ولكنه يُرى في خوارزميات مثل طريقة نيوتن (Golub & Van Loan, 2013).

4.1 العوامل المؤثرة على التقارب

تقارب الخوارزميات العددية التكرارية يعتمد على مجموعة من العوامل التي تؤثر بشكل مباشر على سرعة ودقة الوصول إلى الحل. فهم هذه العوامل يُساعد في تحسين أداء الخوارزميات واختيار الطريقة الأنسب للنظام الخطي المدروس. فيما يلي أبرز العوامل المؤثرة على التقارب:

1) شرط التكييف للمصفوفة *A* (Condition Number)

شرط التكييف يُعبّر عن حساسية النظام الخطي للتغيرات الطفيفة في المدخلات أو الحل. يتم قياسه باستخدام نسبة أكبر القيم الذاتية إلى أصغرها في المصفوفة Aكما يلي:

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

حيث $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ هما القيم الذاتية القصوى والأدنى على التوالي.
إذا كانت $\mathrm{cond}(A) \approx 1$ فإن المصفوفة ذات تكييف جيد، ويكون التقارب سريعًا.
إذا كانت $\mathrm{cond}(A) \gg 1$ فإن المصفوفة ذات تكييف سيئ، مما يؤدي إلى تقارب بطيء وصعوبة في الحصول على حل دقيق(Demmel, 1997) .

2) توزيع القيم الذاتية للمصفوفة *AAA (Eigenvalue Distribution)*

القيم الذاتية للمصفوفة Aتلعب دورًا مهمًا في تحديد سرعة التقارب، خاصة في الطرق التكرارية مثل طريقة التدرج المترافق.
إذا كانت القيم الذاتية موزعة بشكل متساوٍ وبعيدة عن الصفر، فإن التقارب يكون أسرع.
وجود قيم ذاتية صغيرة جدًا أو موزعة بشكل غير متساوٍ يؤدي إلى تقارب أبطأ.
على سبيل المثال، في طريقة جاكوبي، يعتمد التقارب على الطيف الطيفي (Spectral Radius) للمصفوفة التكرارية T.

$$\rho(T) = \max \mid \lambda_i \mid,$$

حيث هي القيم الذاتية للمصفوفة T إذا كان $\rho(T) < 1$ فإن الطريقة تتقارب(Saad, 2003) .

3) اختيار الحل الأولي $\mathbf{x}^{(0)}$

الحل الأولي الجيد يمكن أن يقلل بشكل كبير من عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى الحل.
إذا كان الحل الأولي قريبًا من الحل الحقيقي، فإن الخطأ الابتدائي ($\| \mathbf{e}^{(0)} \|$) يكون صغيرًا، مما يُحسن سرعة التقارب.

4) البنية الهندسية للنظام

بعض النظم تتميز بخواص تجعلها أكثر صعوبة في الحل:

- **النظم قليلة الكثافة (Sparse Systems)*:*** إذا كان النظام قليل الكثافة، فإن الخوارزميات التكرارية مثل التدرج المترافق تكون أكثر كفاءة.
- **النظم السيئة التكييف*:*** تتطلب استخدام خوارزميات أكثر استقرارًا عدديًا مثل التحليل الطيفي (Spectral Analysis).

5) إعادة التشكيل*(Preconditioning)*

إعادة التشكيل هي تقنية تُستخدم لتحسين سرعة التقارب للخوارزميات التكرارية. يتم ذلك بتحويل النظام الأصلي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إلى نظام مكافئ ذو خصائص أفضل، مثل:

$$M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b},$$

حيث Mمصفوفة إعادة التشكيل يتم اختيارها بحيث تكون $M^{-1}A$ ذات طيف طيفي أصغر وشرط تكييف أفضل. إعادة التشكيل تُعدّ من أهم الأدوات لتحسين تقارب الخوارزميات.(Saad, 2003)

6) دقة العمليات العددية*(Numerical Precision)*

الدقة العددية للحاسوب المستخدم تؤثر على التقارب، حيث أن الأخطاء الناتجة عن العمليات العددية قد تُعيق تقارب الحل أو تؤدي إلى تقارب بطيء.

4.2 تقارب الطرق التكرارية مقابل الطرق المباشرة

عند اختيار خوارزمية لحل النظم الخطية، يُعتبر تحليل التقارب أحد العوامل الرئيسية في تحديد الطريقة الأنسب، سواء كانت تكرارية أو مباشرة. يختلف تقارب الطرق التكرارية عن الطرق المباشرة بناءً على طبيعة النظام، حجم البيانات، ومتطلبات الكفاءة الزمنية والذاكرية. نستعرض في هذا القسم مقارنة تفصيلية بين تقارب الطريقتين.

أ- الطرق التكرارية*(Iterative Methods)*

تعتمد الطرق التكرارية على تحسين الحلول بشكل تدريجي عبر تكرار عمليات معينة. يكون التقارب في هذه الطرق تدريجيًا، حيث يتم تقليل الخطأ النسبي $\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \| = \| \mathbf{e}^{(k)} \|$ مع كل تكرار.

إيجابيات التقارب في الطرق التكرارية

- مناسبة للنظم كبيرة الحجم، خاصة قليلة الكثافة.(Sparse Systems)
- تتطلب ذاكرة أقل لأنها لا تخزن المصفوفة بالكامل.
- مرونة في التعامل مع نظم ذات بُنى معقدة.

سلبيات التقارب في الطرق التكرارية

- لا تضمن دائمًا التقارب للحل إذا كانت المصفوفة ذات خصائص غير ملائمة.
- تحتاج إلى شروط معينة مثل التكييف الجيد للمصفوفة أو استخدام تقنيات إعادة التشكيل (Preconditioning) لتحسين التقارب.(Golub & Van Loan, 2013)

ب- الطرق المباشرة*(Direct Methods)*

تتميز الطرق المباشرة بأنها تضمن الحل الدقيق (في حدود الدقة العددية) خلال عدد محدد من الخطوات. التقارب ليس تدريجيًا، بل يتم الوصول إلى الحل النهائي مباشرة.

عوامل تؤثر على الأداء

- شرط التكييف للمصفوفة: إذا كانت المصفوفة ذات شرط تكييف سيئ، فإن الدقة العددية للحاسوب قد تؤثر على الحل.
- حجم المصفوفة: تصبح الطرق المباشرة غير عملية للنظم ذات الحجم الكبير بسبب استهلاك الذاكرة والوقت (Strang, 2006).

إيجابيات التقارب في الطرق المباشرة

- تضمن الحل الدقيق للنظم الصغيرة والمتوسطة الحجم.
- مناسبة للنظم ذات التكييف الجيد.
- لا تتأثر بشكل كبير بعدد القيم الذاتية أو توزيعها.

سلبيات التقارب في الطرق المباشرة

- استهلاك عالي للذاكرة والموارد الحاسوبية.
- غير فعالة للنظم كبيرة الحجم، خاصة في التطبيقات الحقيقية مثل تحليل البيانات الضخمة.(Demmel, 1997)

5.الدراسات السابقة

تناولت العديد من الدراسات السابقة موضوع الخوارزميات العددية المستخدمة في حل النظم الخطية، مع التركيز على تقاربها، كفاءتها، وتأثير خصائص النظم على أدائها. تم استعراض أربعة بحوث علمية ذات صلة تقدم رؤى متعددة حول هذا الموضوع:

1. **الخوارزميات التكرارية للنظم المتناظرة قليلة الكثافة**

قام Khosravi Dehdezi (2024) بتطوير وتحليل ثلاث طرق تكرارية لحل النظم المتناظرة قليلة الكثافة، وهي التدرج المترافق، الباقي المترافق، والباقي الأدنى. أثبت الباحث تقارب الطرق تحت شروط معينة واختبر فعاليتها على معادلات معقدة مثل معادلة كلاين-غوردون. أظهرت النتائج أن الطرق المطورة أكثر كفاءة عند تطبيقها على معادلات متناظرة ذات مصفوفات $\mathcal{M}$ -Tensor. هذه الدراسة تُبرز دور الخوارزميات التكرارية في تحسين الأداء العددي عند التعامل مع نظم متناظرة وكبيرة الحجم.

2. **كفاءة الحلول العددية في بيئات معالجة المعلومات الموزعة**

تناولت دراسة Ayesh & Almahdawi (2024) أداء الخوارزميات العددية في بيئات معالجة المعلومات الموزعة. تم اختبار طرق متعددة مثل الحذف الغاوسي، طريقة جاكوبي، جاوس-سايدل، والنسخ المعدلة منها باستخدام معاملات استرخاء. أظهرت النتائج تفوق الطريقة المعدلة لـ جاوس-سايدل بمعامل استرخاء $\omega = 0.5$ ودقة $\epsilon = 10^{-6}$ من حيث الزمن المستغرق والكفاءة في النظم قليلة الكثافة. توفر هذه الدراسة إرشادات لتحسين أداء الخوارزميات في الأنظمة الموزعة.

3. **تحليل فورييه لتقارب خوارزميات الشبكة متعددة المستويات**

ناقشت دراسة Zhang et al. (2018) آليات تقارب خوارزميات الشبكة متعددة المستويات (Multigrid V-cycle) ودورها في تقليل تأثير شرط التكييف الكبير للنظم. تم تحليل الطيف الترددي لمكونات الباقي الناتج عن

التكرارات، ووجدت الدراسة أن التقارب يتحسن عند استخدام شبكات أكثر خشونة لتقليل التأثيرات السلبية للشرط العددي العالي. أكدت الدراسة أن هذه الخوارزميات قريبة من الخطية في الكفاءة، مما يجعلها مناسبة للنظم ذات أحجام كبيرة في تطبيقات مثل انتقال الحرارة وميكانيكا المواد.

4. **الخوارزميات التكرارية لحل معادلات المصفوفة الخطية**

درس Hasanov (2024) تقارب الخوارزميات التكرارية عند تطبيقها على معادلات المصفوفة الخطية الناتجة عن تطبيق طريقة نيوتن لحل معادلات غير خطية. تضمنت الدراسة تحليلًا نظريًا مدعومًا بأمثلة عددية لتوضيح فعالية الخوارزميات المقترحة. أظهرت النتائج أن الخوارزميات التكرارية تُظهر تقاربًا سريعًا عند التعامل مع نظم محددة.

تؤكد هذه الدراسات أهمية تطوير الخوارزميات العددية وتحليل تقاربها لتحسين كفاءتها عند التعامل مع نظم خطية معقدة. تُبرز أهمية اختيار الخوارزمية المناسبة بناءً على خصائص النظام، مثل شرط التكييف وكثافة المصفوفة، مع استخدام تقنيات مثل إعادة التشكيل لتحسين الأداء. تُعد هذه الدراسات مرجعًا علميًا مهمًا يدعم توجهات البحث الحالي.

6.المنهجية

تستخدم الدراسة منهجية حسابية تحليل أداء الخوارزميات العددية من خلال تقييم تقاربها وكفاءتها الزمنية والدقة العددية باستخدام بيئة Matlab، التي تُعدّ واحدة من أقوى الأدوات البرمجية في مجال الحسابات العددية. تعتمد المنهجية الحسابية على الخطوات التالية:

1) اختيار الخوارزميات العددية:
- تم اختيار ثلاث أنواع من خوارزميات تمثل الفئات الرئيسية:
  - الخوارزميات المباشرة :الحذف الغاوسي وطريقة التفكيك الثلاثي
  - الخوارزميات التكرارية :طريقة جاكوبي وطريقة جاوس-سايدل.
  - الخوارزميات المتقدمة :مثل طريقة التدرج المترافق

2) تصميم النظم الخطية:
- تم إعداد مجموعة من النظم الخطية بمصفوفات ذات خصائص مختلفة تشمل:
  - نظم صغيرة 10×10 الي نظم كبيرة 1000×1000.
  - مصفوفات متناظرة وغير متناظرة.
  - مصفوفات ذات شرط تكييف جيد وأخرى سيئة التكييف.

تنفيذ الحسابات:

تمت البرمجة باستخدام Matlab، مع استخدام الدوال المدمجة:
- ‘lu‘ للتفكيك الثلاثي.
- ‘eig‘ لتحليل القيم الذاتية.
- ‘iterative methods ‘ لحساب الطرق التكرارية.

معيار الإيقاف للطرق التكرارية تم تحديده كالتالي:

$$\| \mathbf{Ax}^{(k)} - \mathbf{b} \| \leq \epsilon,$$

حيث $\epsilon = 10^{-6}$

7.حالات الاختبار*(Test Cases)*

الحالة الأولى: نظام خطي صغير الحجم عبارة عن مصفوفة متناظرة موجبة التعريف بأبعاد 10×10.

جميع القيم الذاتية $\lambda_i > 0$.

شرط التكييف $\text{cond}(A) \approx 10$.

الحالة الثانية: نظام خطي متوسط الحجم وسيئ التكييف

عبارة عن مصفوفة غير متناظرة بأبعاد 100×100 ذات شرط تكييف مرتفع

$$\text{cond}(A) \approx 10^5$$

الحالة الثالثة: نظام خطي كبير الحجم وقليل الكثافة وهو عبارة عن مصفوفة قليلة الكثافة بأبعاد 1000×1000 حيث 90% من العناصر تساوي صفرًا.

- القيم الذاتية موزعة بشكل متساوٍ.
- شرط التكييف $\text{cond}(A) \approx 100$

8.المقاييس المستخدمة للتقارب (عدد التكرارات، زمن التنفيذ)

لتقييم تقارب الخوارزميات العددية المستخدمة في حل النظم الخطية، تم اختيار مجموعة من المقاييس الكمية التي تعكس الأداء والدقة، وهي كالتالي:

أ- عدد التكرارات(Number of Iterations) وهوعدد التكرارات المطلوبة بواسطة الخوارزميات التكرارية للوصول إلى حل يحقق معيار الإيقاف المحدد.

$$\| \mathrm{Ax}^{(k)} - \mathrm{b} \| \leq \epsilon,$$

حيث ϵ هو العتبة المقبولة للدقة عادة ($\epsilon = 10^{-6}$).

ب- زمن التنفيذ(Execution Time) وهو الزمن الكلي الذي تستغرقه الخوارزمية للوصول إلى الحل، ويُقاس بالثواني أو بالمللي ثانية. يتم قياس الزمن باستخدام دوال قياس الوقت في Matlab .

ت- معيار الخطأ(Error Norm)

يتم قياس الخطأ في الحل باستخدام المعيار

$$\| \mathbf{e} \| = \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|,$$

حيث e هو مقدار الخطأ.

9.مقارنة بين الطرق التكرارية والمباشرة

يوضح جدول (1) مقارنة المقاييس بين الطرق التكرارية والمباشرة لتوضيح الفروق الجوهرية بين أداء الطريقتين بناءً على ثلاثة مقاييس رئيسية: عدد التكرارات، زمن التنفيذ، ومعيار الخطأ. تُظهر الطرق التكرارية مثل التدرج المترافق كفاءة عالية خاصة عند التعامل مع نظم كبيرة وقليلة الكثافة، حيث تقلل عدد التكرارات المطلوبة وتستهلك ذاكرة أقل. في المقابل، تُعد الطرق المباشرة مثل الحذف الغاوسي والتفكيك الثلاثي مثالية للنظم صغيرة ومتوسطة الحجم، إذ توفر دقة عددية عالية بزمن تنفيذ معقول. يُبرز الجدول أهمية اختيار الطريقة الأنسب بناءً على طبيعة النظام وخصائصه، مما يسهم في تحقيق التوازن بين الكفاءة الزمنية والدقة العددية.

جدول1: مقارنة المقاييس بين الطرق التكرارية والمباشرة

المقياس	الطرق التكرارية	الطرق المباشرة
عدد التكرارات	يُستخدم لتقييم التقارب	لا يُطبق
زمن التنفيذ	يعتمد على عدد التكرارات	يعتمد على حجم المصفوفة فقط
معيار الخطأ	يتحقق تدريجيًا خلال التكرارات	يُحقق مباشرة في حدود الدقة العددية

10. النتائج

بعد تنفيذ الخوارزميات العددية المدروسة على حالات الاختبار المختلفة، تم تحليل النتائج بناءً على المقاييس الرئيسية: عدد التكرارات، زمن التنفيذ، ومعيار الخطأ. يوضح هذا التحليل الفروق الجوهرية بين أداء الطرق التكرارية والمباشرة تحت ظروف مختلفة من حيث حجم النظام وخصائص المصفوفة.

1) عدد التكرارات للطرق التكرارية

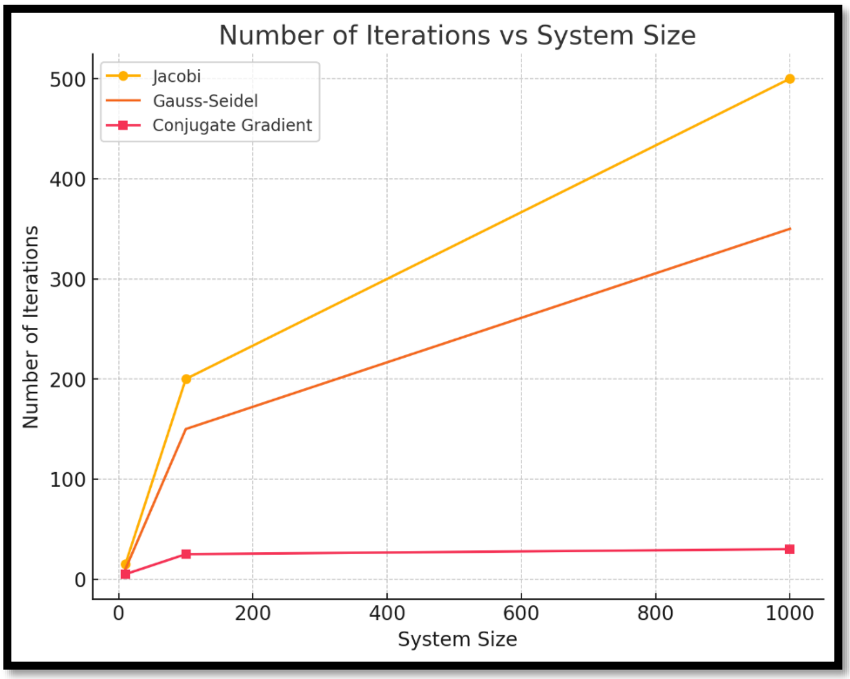
الجدول (2) يحتوي على عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى الحل ضمن معيار الإيقاف $\epsilon = 10^{-6}$ في الحالات المدروسة.

الحالة	طريقة جاكوبي	طريقة جاوس-سايدل	التدرج المترافق
صغيرة الحجم	15	10	5
متوسطة الحجم	200	150	25
كبيرة وقليلة الكثافة	500	350	30

- طريقة التدرج المترافق تُظهر أسرع تقارب، خاصةً للنظم المتناظرة والموجبة التعريف.
- طريقة جاوس-سايدل تتفوق على جاكوبي بفضل تحديث القيم أثناء التكرار.

الشكل (1) يوضح العلاقة بين حجم النظام وعدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى الحل لكل من الطرق التكرارية.

الشكل (1) عدد التكرارات مقابل حجم النظام



2) زمن التنفيذ *(Execution Time)*

الجدول (3) يوضح نتائج قياس الزمن المستغرق لكل خوارزمية باستخدام دالة الوقت في *Matlab* (tic/toc)

الحالة	الحذف الغاوسي	LU Decomposition	طريقة جاكوبي	جاوس-سايدل	التدرج المترافق
صغيرة الحجم	0.01 s	0.02 s	0.05 s	0.04 s	0.03 s

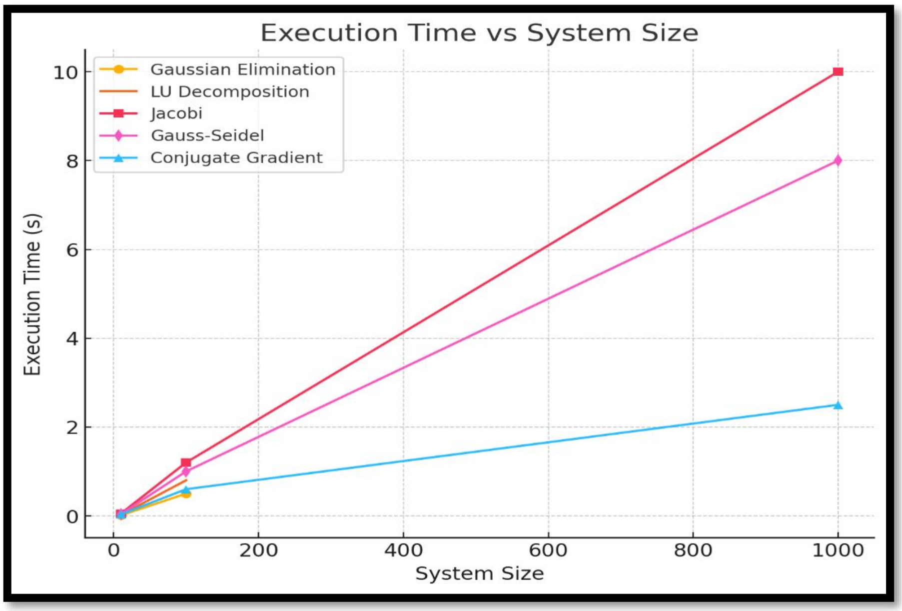
متوسطة الحجم	0.5 s	0.8 s	1.2 s	1.0 s	0.6 s
كبيرة وقليلة الكثافة	غير فعال	غير فعال	10 s	8 s	2.5 s

الجدول (3) زمن التنفيذ

- الطرق المباشرة (الحذف الغاوسي وLU)تُظهر أداءً عاليًا مع النظم الصغيرة والمتوسطة الحجم ولكن تصبح غير فعالة مع النظم الكبيرة قليلة الكثافة.
- طريقة التدرج المترافق هي الأسرع للنظم الكبيرة وقليلة الكثافة.

الشكل (2) يوضح العلاقة بين حجم النظام والزمن المستغرق لتنفيذ الخوارزميات المختلفة.

الشكل (2) زمن التنفيذ مقابل حجم النظام



3) معيار الخطأ(Error Norm)

الجدول (4) يوضح معيار الخطأ النهائي $\| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|$ لكل خوارزمية

الحالة	الحذف الغاوسي	LU Decomposition	طريقة جاكوبي	جاوس-سايدل	المتدرج المترافق
صغيرة الحجم	10^{-10}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-8}
متوسطة الحجم	10^{-10}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-8}
كبيرة وقليلة الكثافة	غير فعال	غير فعال	10^{-5}	10^{-5}	10^{-7}

- الطرق المباشرة تُنتج حلولاً دقيقة جدًا (10^{-10}) بينما الطرق التكرارية تعتمد على دقة معيار الإيقاف.
- طريقة التدرج المترافق تُظهر خطأ أقل مقارنةً بـ جاكوبي وجاوس-سايدل.

النتائج الرئيسية

- الأداء الكلي:
  - الطرق المباشرة مثالية للنظم الصغيرة والمتوسطة الحجم ولكن تصبح غير فعالة للنظم الكبيرة.

مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol 7, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 100 ~ 113

Surman Journal for Science and Technology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)

SJST
sjst.scst.edu.ly

- الطرق التكرارية، خصوصًا التدرج المترافق، أثبتت تفوقها على النظم الكبيرة وقليلة الكثافة.

• عدد التكرارات:
  - التدرج المترافق أظهر أسرع تقارب مقارنةً بـ جاكوبي وجاوس-سايدل.
• زمن التنفيذ:
  - الطرق التكرارية تستغرق وقتًا أطول مع النظم الصغيرة ولكنها تتفوق مع النظم الكبيرة.

11.التوصيات

استنادًا إلى تحليل النتائج ومقارنة أداء الخوارزميات العددية المستخدمة في حل النظم الخطية، يمكن تقديم التوصيات التالية لتحسين الأداء واختيار الخوارزمية المناسبة بناءً على خصائص النظام:

1. **اختيار الخوارزمية المناسبة حسب خصائص النظام**

• النظم الصغيرة والمتوسطة الحجم:
  - يُفضل استخدام الطرق المباشرة مثل الحذف الغاوسي أو التفكيك الثلاثي نظرًا لكفاءتها الزمنية ودقتها العالية.
• النظم كبيرة الحجم وقليلة الكثافة:
  - الطرق التكرارية مثل التدرج المترافق هي الأنسب بسبب كفاءتها في استغلال خصائص المصفوفة وتقليل استهلاك الموارد الحاسوبية.

2. **تحسين التقارب باستخدام إعادة التشكيل(*Preconditioning*)**

• عند التعامل مع نظم ذات شرط تكييف سيئ $(\text{cond}(A) \gg 1)$، يُوصى باستخدام تقنية إعادة التشكيل لتحسين خصائص المصفوفة قبل تطبيق الخوارزمية.
• يمكن استخدام مصفوفات مثل Mبحيث تجعل $M^{-1}A$ أكثر استقرارًا وعدد التكرارات أقل.

3. **اعتماد معايير إيقاف مناسبة**

• لضمان الدقة وتقليل الزمن المستغرق، يُوصى بتحديد معايير إيقاف صارمة مثل:

$$\| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \| \leq \epsilon,$$

حيث $\epsilon = 10^{-6}$ كحد أدنى.

12.الخاتمة

في هذه الدراسة، تم تحليل أداء مجموعة من الخوارزميات العددية الشائعة لحل النظم الخطية، مع التركيز على مفهوم التقارب والعوامل المؤثرة عليه. تناول البحث مقارنة شاملة بين الطرق المباشرة والطرق التكرارية من حيث عدد التكرارات، الزمن المستغرق، ومعيار الخطأ. النتائج المستخلصة تقدم رؤية واضحة حول نقاط القوة والضعف لكل خوارزمية ومدى ملاءمتها لحالات اختبار متنوعة.

أظهرت النتائج أن الطرق المباشرة (الحذف الغاوسي والتفكيك الثلاثي) تتميز بالكفاءة العالية والدقة عند التعامل مع نظم صغيرة ومتوسطة الحجم ذات تكييف جيد. ومع ذلك، فإن استخدامها يصبح غير عملي للنظم الكبيرة وقليلة الكثافة بسبب استهلاكها الكبير للذاكرة والزمن.

على الجانب الآخر، أثبتت الطرق التكرارية، (جاكوبي، جاوس-سايدل، والتدرج المترافق) كفاءتها في التعامل مع النظم الكبيرة، خاصة تلك ذات البُنية قليلة الكثافة. كان التدرج المترافق الأكثر تفوقًا من حيث سرعة التقارب وتقليل عدد التكرارات المطلوبة، مما يجعله خيارًا مثاليًا للنظم المتناظرة والموجبة التعريف.

تطرقت الدراسة أيضًا إلى أهمية العوامل المؤثرة على التقارب، مثل شرط التكييف، توزيع القيم الذاتية، واختيار الحل الأولي. وأظهرت أن تحسين هذه العوامل باستخدام تقنيات إعادة التشكيل (Preconditioning) يمكن أن يعزز من كفاءة الخوارزميات التكرارية بشكل كبير.

تُعد هذه الدراسة خطوة نحو فهم أعمق للخوارزميات العددية وتطبيقاتها العملية. مع ازدياد تعقيد الأنظمة الحسابية الحديثة، تبرز الحاجة إلى تطوير خوارزميات أكثر كفاءة ومرونة للتعامل مع التحديات المستقبلية. بناءً على ذلك، توصي الدراسة بمزيد من البحث في تحسين الخوارزميات التكرارية وتطوير تقنيات مبتكرة لتحسين الأداء العددي، مع الاستفادة من التقنيات الحديثة مثل الذكاء الاصطناعي لتخصيص الخوارزميات وفقًا لخصائص النظام المدروس.

باختصار، تقدم هذه الدراسة إرشادات عملية لاختيار الخوارزمية الأنسب بناءً على حجم النظام وخصائصه، مما يساهم في تحسين الكفاءة العددية ويعزز من دقة وسرعة الحسابات في التطبيقات العملية المتنوعة.

13.المراجع

1. Ayesh, A., & Almahdawi, A. (2024). Evaluate the Efficiency of Techniques for Solving Systems of Linear Algebraic Equations in the Context of Distributed Information Processing Through the Utilization of Simulation. Journal of Distributed Systems, 5, 282–285.
2. Callier, F. M., & Desoer, C. A. (2012). Linear system theory. Springer Science & Business Media.
3. Cullen, C. G. (2012). Matrices and linear transformations. Courier Corporation.
4. Demmel, J. W. (1997). Applied numerical linear algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics.
5. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix Computations. Johns Hopkins University Press.
6. Hasanov, V. (2024). Iterative Methods for Solving a Linear Matrix Equation. Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen, Faculty of Mathematics and Informatics, XXV C, 3–14. https://doi.org/10.46687/VZHP2021
7. Ipsen, I. C. F. (2009). Numerical matrix analysis: Linear systems and least squares. Society for Industrial and Applied Mathematics.
8. Kishore Kumar, N., & Schneider, J. (2017). Literature survey on low rank approximation of matrices. Linear and Multilinear Algebra, 65(11), 2212–2244.
9. Khosravi Dehdezi, E. (2024). Iterative Methods for Sparse Symmetric Multilinear Systems. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 50. https://doi.org/10.1007/s41980-024-00875-y
10. Lancaster, P. (1970). Explicit solutions of linear matrix equations. SIAM Review, 12(4), 544–566.
11. Lay, D. C. (2003). Linear algebra and its applications. Pearson Education India.
12. Saad, Y. (2003). Iterative methods for sparse linear systems. Society for Industrial and Applied Mathematics.
13. Sarlos, T. (2006, October). Improved approximation algorithms for large matrices via random projections. In 2006 47th annual IEEE symposium on foundations of computer science (FOCS'06) (pp. 143–152). IEEE.
14. Schneider, H., & Barker, G. P. (1989). Matrices and linear algebra. Courier Corporation.
15. Shores, T. S. (2007). Applied linear algebra and matrix analysis (Vol. 2541). Springer.
16. Stoll, R. R. (2013). Linear algebra and matrix theory. Courier Corporation.
17. Strang, G. (2006). Linear algebra and its applications. Thomson Learning.
18. Zhang, Y., Li, M., & Liu, G. (2018). A Fourier Transform Analysis of Convergence Properties of Multigrid V-Cycle Algorithm. International Journal of Computational Methods, 16, 1844010. https://doi.org/10.1142/S0219876218440103.